２　波動方程式と平面波

Maxwellの方程式

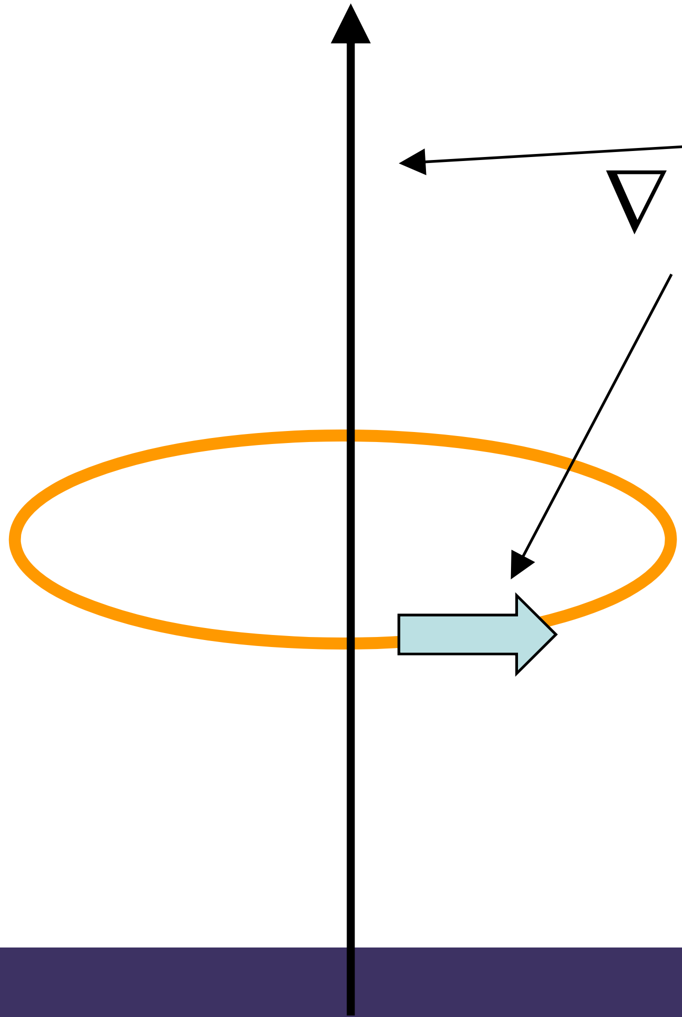
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$ ファラデーの法則

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$ アンペアの法則

$$\nabla\bullet\boldsymbol{D}=\rho$$ 電界に関するガウスの法則

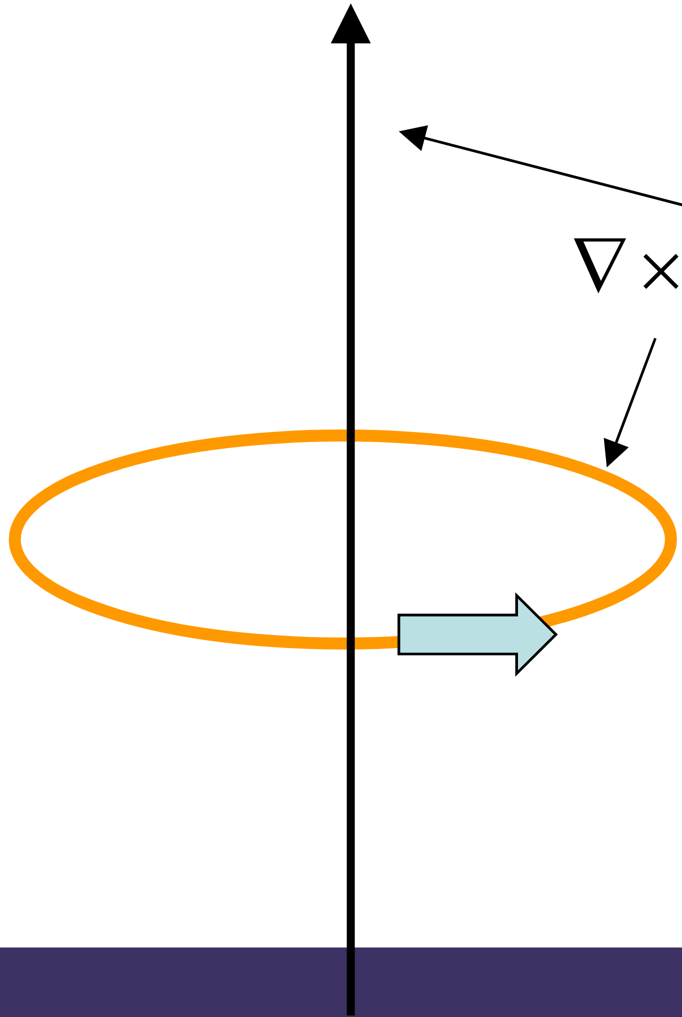
$$\nabla\bullet\boldsymbol{B}=0$$ 磁界に関するガウスの法則

ファラデーの法則



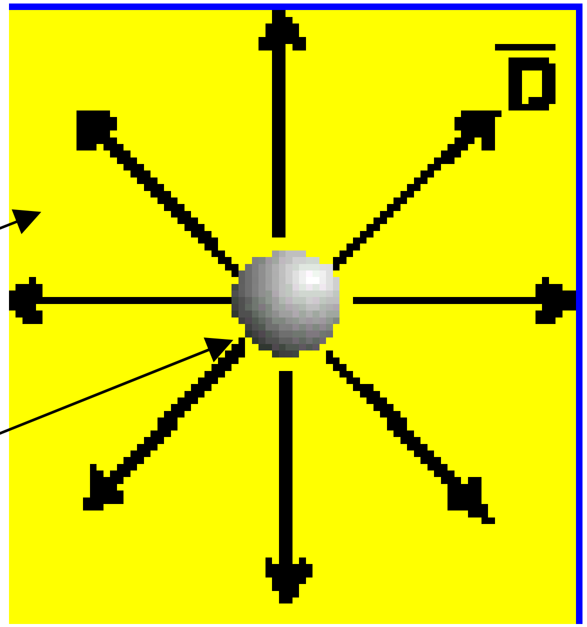
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

アンペアの法則



$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

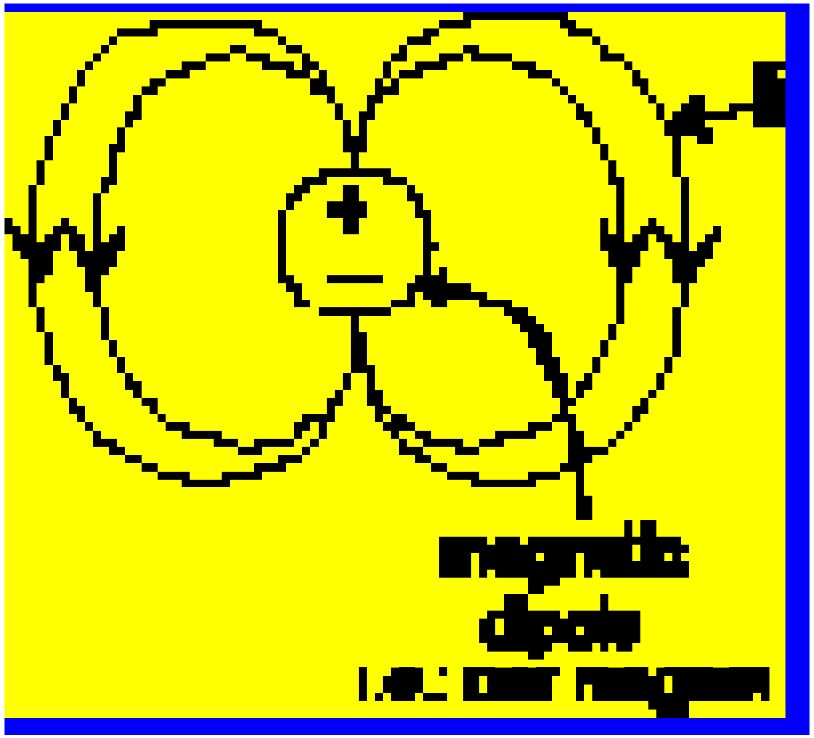
電界に関するガウスの法則



$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

磁界に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$



構成方程式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

比誘電率，比透磁率

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\,(\mathrm{F/m}) \qquad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,(\mathrm{H/m}) \qquad \mu = \mu_r \mu_0 \cong \mu_0$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

オームの法則

自由空間（真空）中のMaxwellの方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \bullet \boldsymbol{H} = 0$$

４つの式をE,Hに関する連立方程式として解く

ーー＞波動方程式

波動方程式の導出（ベクトル数学）

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\xrightarrow{\text{両辺にrot}}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\nabla\bullet div\boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

$$-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

波動方程式

波動方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$$

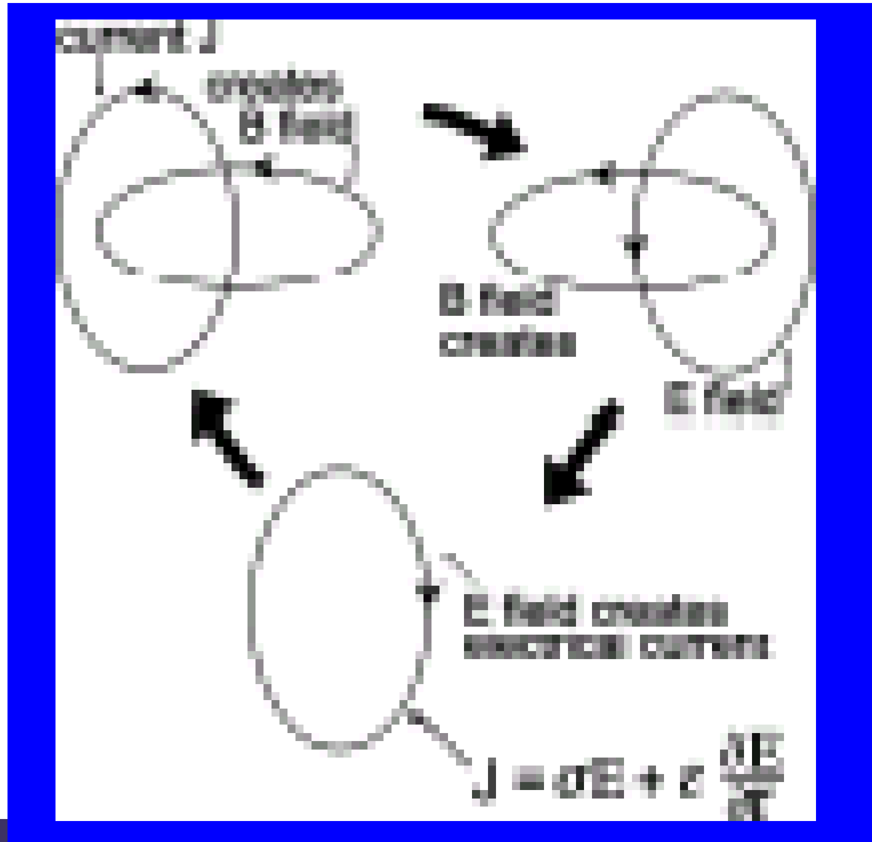
直交座標系では

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

波動方程式の意味


current J
creates B field
B field creates
E field
E field creates electrical current
$J = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

平面波の導出

仮定

(1) : 波動は z方向に伝搬する

(2) : 波動はx-y平面内で一様である.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Maxwellの方程式に戻る

$\nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0$　　に前記条件を入れて

$$\nabla \bullet \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

z方向の変化があることを認めるためには　$E_Z = 0$

つまり電界z成分は存在しない

電磁波は横波である

スカラー波動方程式

$$\nabla^2 u(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

1次元の場合

$$u(z,t) = u^+(z-ct) + u^-(z+ct)$$

電界と磁界の関係

$$E_x(z,t) = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

電界として上式を仮定し

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

に代入すれば次式を得る。

$$H_y(z,t) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\left\{ f_1(z-ct) - f_2(z+ct) \right\}$$

$$= \frac{1}{\eta_0}\left\{ f_1(z-ct) - f_2(z+ct) \right\}$$

スカラー波動方程式の一般解としての平面波

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$E_x = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)$$

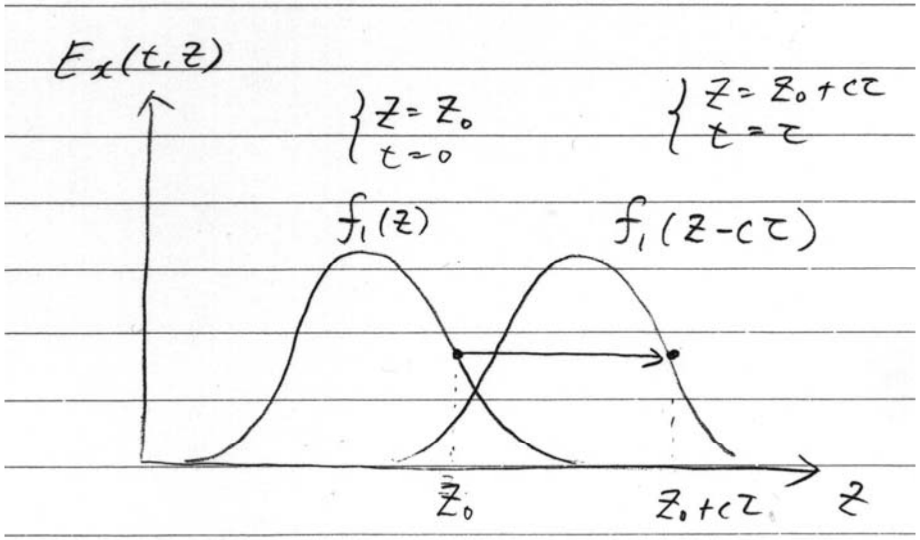
$$H_y = \frac{1}{\eta_0}\left\{ f_1(z - ct) - f_2(z + ct) \right\}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 (m/s)$$ 速度

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376.6 \cong 120\pi$$

固有インピーダンス;
電界と磁界の比

波動の移動



$$E_x = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

$$z - ct = \text{constant}$$

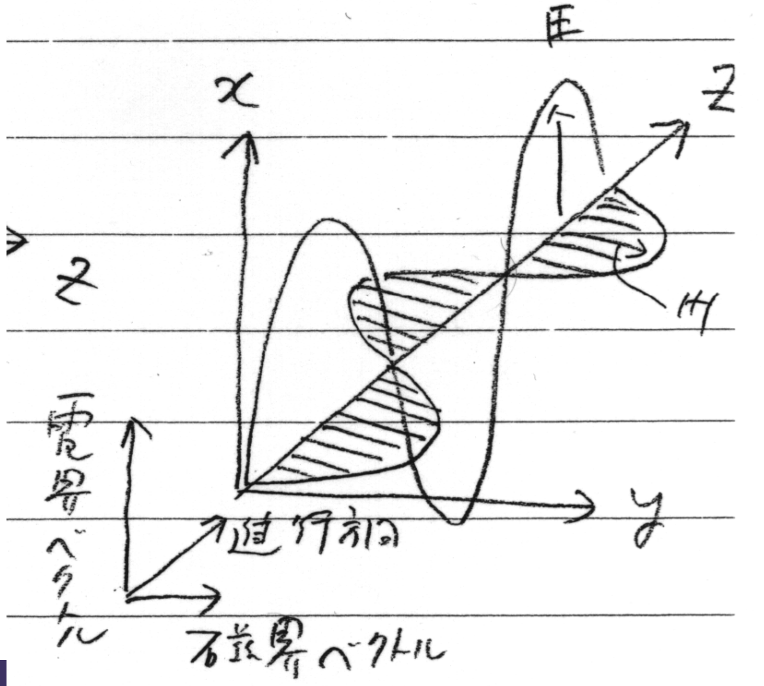
$$\text{z=constant} + c$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c$$

電界と磁界

$$E_x = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

$$H_y = \frac{1}{\eta_0}\left\{ f_1(z-ct) - f_2(z+ct) \right\}$$



$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376.6 \cong 120\pi$$

真空の特性インピーダンス

定常状態での波動方程式の解

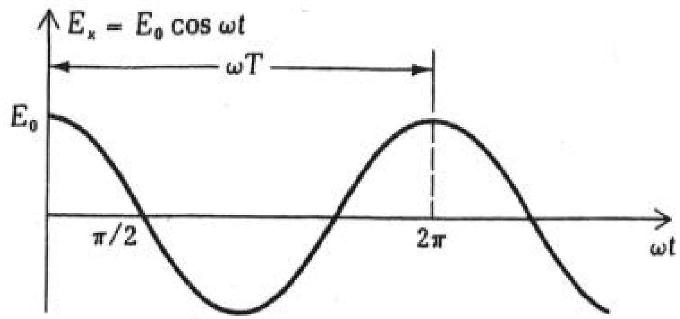
$$\Delta U(x) = -\frac{\omega^2}{v^2} U(x) \xrightarrow[\text{一次元}]{} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} U(x)$$

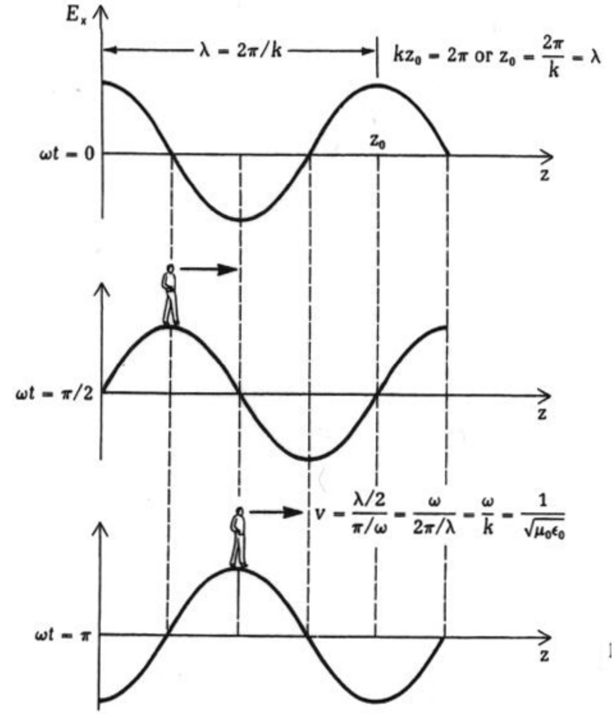
$$U(x) = e^{\lambda x} \qquad \lambda^2 = -\frac{\omega^2}{v^2}$$

$$k = \pm j\lambda = \pm \frac{\omega}{v} = \pm \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$ 波数

$$U(x) = U_1 e^{-jkx} + U_2 e^{+jkx}$$

時間ー空間での波動の伝搬





$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\left(A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}\right) e^{j\omega t}\right\}$$

$$= A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t + kz)$$

$$\omega t - kz = 定数$$

平面波のフェーザ表示

$$\boldsymbol{E} = \hat{x} E_0 e^{-jkz}$$

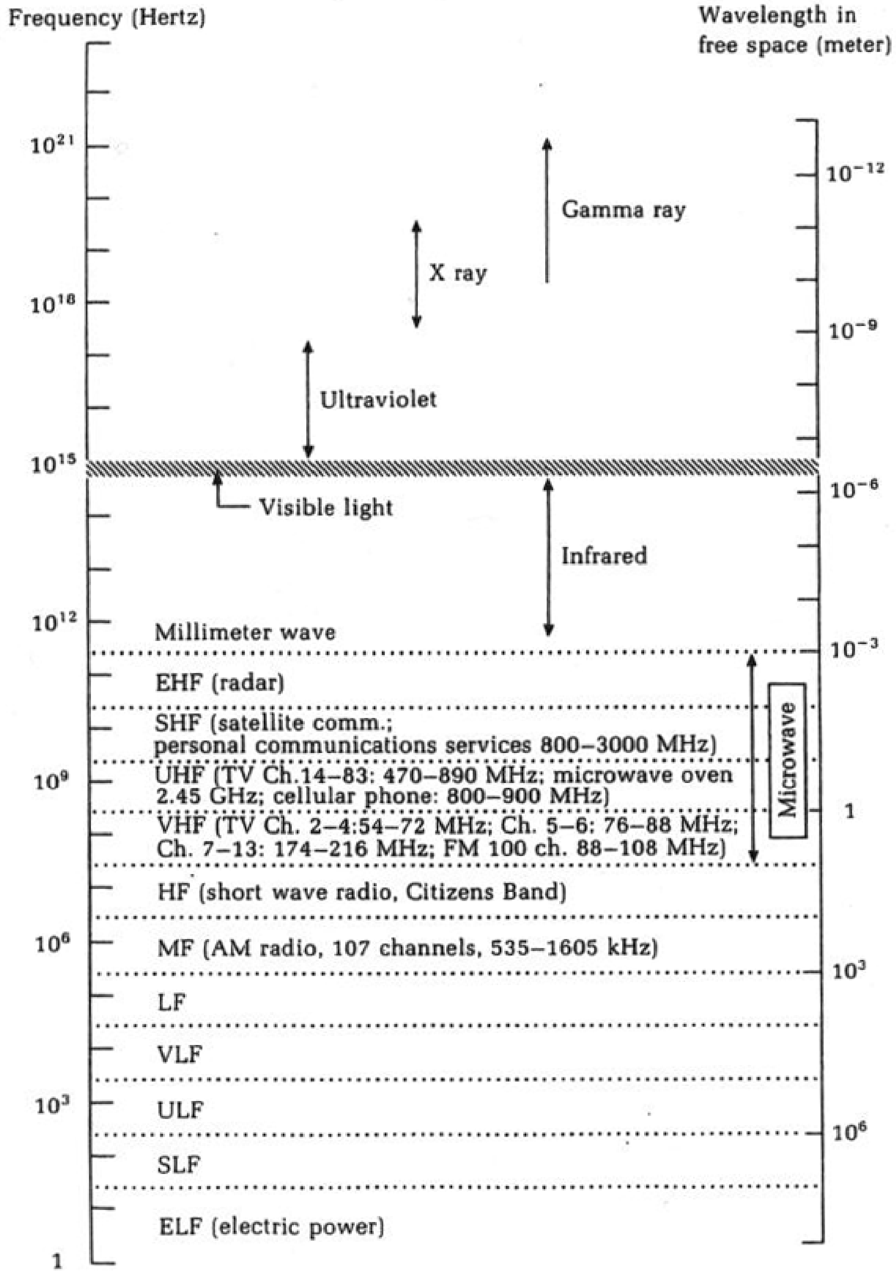
$: z$方向に伝搬する振幅E_0の平面波。x方向の偏波をもつ。

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

この表現では各周波数ωが暗黙の内に仮定されている。

電磁波とスペクトラム

Figure 3.1 Electromagnetic spectrum.



レーダにおける周波数の呼称

名称	周波数 (Hz)	波長 (m)
HF	3M-30M	100-10m
VHF	30M-300M	10-1m
UHF (P)	300M-1G	1-0.3m
L	1G-2G	30-15cm
S	2G-4G	15-7.5cm
C	4G-8G	7.5-3.75cm
X	8G-18G	3.75-1.7cm
K	18G-27G	1.7-1.1cm
K_a	27G-40G	1.1-0.75cm

Pi-SAR

1.27 GHz 23cm

ALOS/PALSAR

1.27 GHz 23cm

TerraSAR

9.65GHz 3.1cm